

問題 1

a は正の定数とする.

$0 \leq x \leq a$ における函数

$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

の最大値を $M(a)$, 最小値 $m(a)$ とする. $M(a)$, $m(a)$ をそれぞれ a の式で表せ.

考え方 初めに領域を図示してから考える.

解答

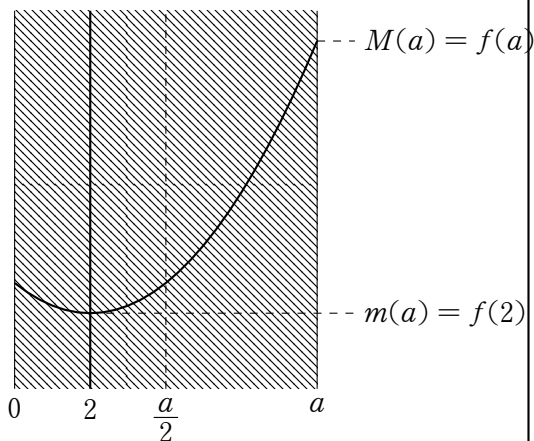
$$f(x) = x^2 - 4x + 1$$

$$= (x - 2)^2 - 3.$$

以下で, a の値によって場合を分ける.

(図の縦横縮尺は任意に調整している)

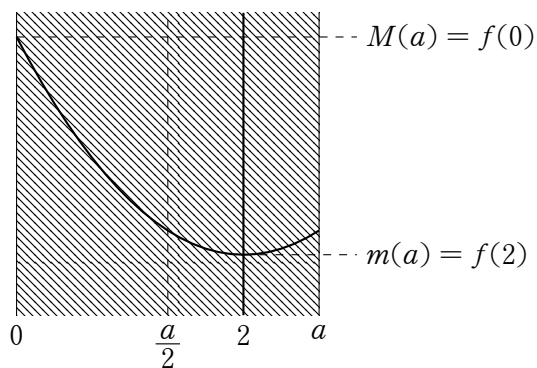
(i) $2 \leq \frac{a}{2} \Leftrightarrow 4 \leq a$ のとき



$$M(a) = f(a) = a^2 - 4a + 1.$$

$$m(a) = f(2) = -3.$$

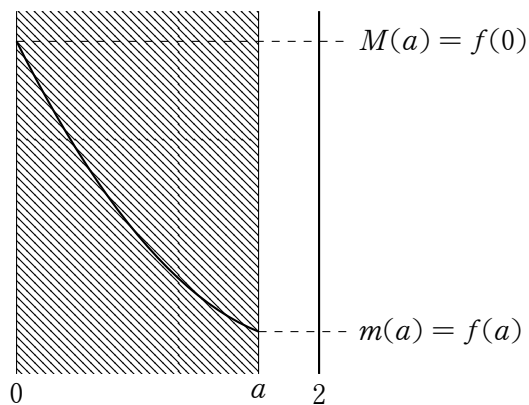
(ii) $\frac{a}{2} \leq 2 \leq a \Leftrightarrow 2 \leq a \leq 4$ のとき



$$M(a) = f(0) = 1.$$

$$m(a) = f(2) = -3.$$

(iii) $(0 \leq) a \leq 2$ のとき



$$M(a) = f(0) = 1.$$

$$m(a) = f(a) = a^2 - 4a + 1.$$

以上をまとめて,

$$M(a) = \begin{cases} a^2 - 4a + 1 & (4 \leq a) \\ 1 & (0 < a \leq 4) \end{cases}.$$

$$m(a) = \begin{cases} -3 & (2 \leq a) \\ a^2 - 4a + 1 & (0 < a \leq 2) \end{cases} .$$